

TEMA 6: DESCRIPCIÓN DEL MOVIMIENTO DE UNA PARTÍCULA

- 6.1 Concepto de movimiento. Sistema de referencia. Vector de posición de una partícula. Vector desplazamiento.
- 6.2 Velocidad media e instantánea.
- 6.3 Aceleración. Componentes intrínsecas de la aceleración.
- 6.4 Clasificación de movimientos según los valores de aceleración y sus componentes.
- 6.5 Estudio de algunos movimientos: uniforme, uniformemente acelerado, circular.

6.1. CONCEPTO DE MOVIMIENTO. SISTEMA DE REFERENCIA. VECTOR DE POSICIÓN DE UNA PARTÍCULA. VECTOR DESPLAZAMIENTO.

6.1.1. Concepto de movimiento.

Cuando viajamos en un avión, sentados en nuestra plaza, creemos que estamos en reposo y no dudaríamos en afirmar que la azafata que se pasea por el pasillo está en movimiento. Pero, ¿Estamos realmente en reposo, o nos movemos junto con el avión? ¿Está realmente en reposo la mesa sobre la que apoyas estos apuntes? En definitiva, la pregunta que nos planteamos es: *¿cuándo podemos afirmar que un objeto se mueve?*

Un cuerpo se mueve cuando cambia de posición respecto a un sistema de referencia que consideramos fijo.

Así, según donde esté situado el sistema de referencia (donde esté el observador que estudia el movimiento) mediremos un movimiento u otro, o no mediremos movimiento alguno.

Los movimientos, entonces, son siempre relativos, pues para un observador en la Tierra un edificio sería un objeto carente de movimiento, mientras que para un observador en el espacio, dicho edificio tendrá un movimiento de rotación y otro de traslación. Por eso hablamos de movimiento relativo, dependiendo de la ubicación del sistema de referencia.

El sistema de referencia (punto O, ejes coordenados, criterio de signos) es elegido por el observador, la persona que estudia el movimiento. Una vez elegido, debe mantenerse. No puede cambiarse durante la resolución del problema.

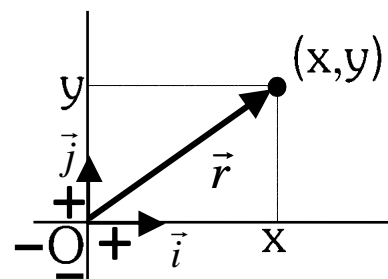
Punto material: En nuestro estudio del movimiento consideraremos que el objeto móvil es una partícula, un punto material que representa al objeto (bola, coche, avión, electrón...) y que concentra toda su masa.

6.1.2. Posición. Trayectoria. Ecuación de movimiento. Vector desplazamiento.

Posición (\vec{r}): Lugar que ocupa el móvil en un instante determinado.

- La posición se indica con las coordenadas del punto en el que está situado el móvil, medidas respecto al sistema de referencia escogido. O lo que es lo mismo, con las componentes del vector \vec{r} , que va desde el punto O hasta el punto en que está la partícula.
- Lógicamente, la posición de un móvil dependerá del sistema de referencia escogido.

En este curso estudiaremos movimientos en dos dimensiones. Nuestro sistema de referencia está formado por los ejes coordenados x e y, a los que corresponden los vectores unitarios \vec{i} y \vec{j} . En todos los problemas es obligatorio dibujar claramente el sistema de referencia con el criterio de signos. El desplazamiento será el segmento o vector que une los puntos inicial y final. También se calcula restando las posiciones (final menos inicial). Para ello restamos las coordenadas x e y por separado.



Así, el vector de posición \vec{r} se expresará $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$

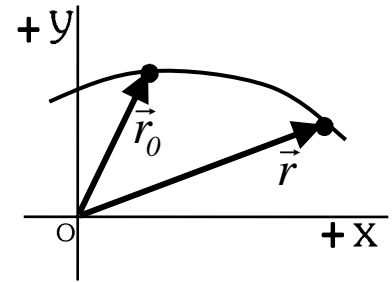
Nota: (En el espacio (3 dimensiones), existiría una componente más, de modo que $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Todas las magnitudes vectoriales tendrían tres componentes)

En el Sistema Internacional de unidades (S.I.), las coordenadas están dadas en metros (m).

Trayectoria: Es la línea formada por la unión de los puntos que sigue el móvil en su recorrido.

Según la forma de la trayectoria, tendremos movimientos:

- Rectilíneos.
- Curvilíneos.



Ecuación de movimiento:

Al transcurrir el tiempo, el móvil va pasando por los distintos puntos de la trayectoria. A cada valor de t , corresponde una posición. Es decir, la posición \vec{r} del móvil depende del tiempo.

A la expresión de la posición en función del tiempo $\vec{r}(t)$ se le denomina ecuación de movimiento de la partícula.

Al sustituir en ella un valor de tiempo, obtenemos las coordenadas del punto en el que se encuentra el móvil en ese instante. Cada movimiento tiene su propia ecuación de movimiento.

Posición inicial: $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ Posición en el instante en que empezamos a contar el movimiento. Normalmente consideraremos $t_0 = 0$ s., pero puede ser cualquier otro valor de tiempo.

Vector desplazamiento ($\Delta\vec{r}$): Vector que une dos puntos de la trayectoria.

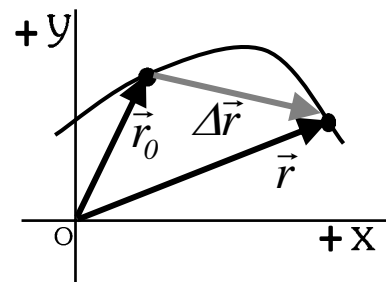
Va desde la posición considerada inicial hasta la posición final. Se calcula como la diferencia entre las dos posiciones (siempre la final menos la inicial).

$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$$

Diferencia entre desplazamiento y distancia recorrida: Vemos que $\Delta\vec{r}$ mide el desplazamiento en línea recta. El módulo del desplazamiento

($|\Delta\vec{r}|$) sólo nos indica la distancia en línea recta desde el punto inicial hasta el punto final. La distancia recorrida (s) se mide sobre la trayectoria.

Los valores de $|\Delta\vec{r}|$ y s sólo coinciden cuando la trayectoria es rectilínea.



6.2. VELOCIDAD MEDIA E INSTANTÁNEA.

Todo movimiento supone un cambio en la posición del móvil. Pero este cambio puede ser más rápido o más lento. La **velocidad** mide la rapidez de ese cambio. Es decir, *la velocidad mide cómo cambia la posición de un móvil con el tiempo*.

6.2.1. Velocidad media:

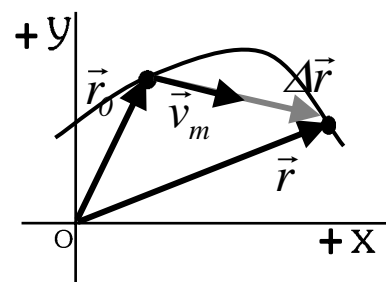
Mide el cambio de posición en un intervalo de tiempo.

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{t - t_0}$$

Unidades: En el S.I. $[v_m] = m/s = m \cdot s^{-1}$

Otras unidades: km/h, nudos (millas marinas/h)

Del mismo modo que el vector desplazamiento, la velocidad media sólo tiene en cuenta los instantes inicial y final, independientemente de cómo haya sido el movimiento entre ambos instantes. Sólo nos da información sobre el promedio de velocidad en el intervalo. NO nos dice cómo se mueve en un instante concreto.



6.2.2 Velocidad instantánea (\vec{v}):

 Indica cómo varía la posición del móvil en cada instante.

Hemos visto que la velocidad media no nos da información sobre cómo se mueve la partícula en un instante concreto. Pero si calculamos la velocidad media en un intervalo corto de tiempo, la información del movimiento resulta más precisa. Cuanto más corto sea el tiempo que dejemos pasar, más se aproximará la velocidad media a la velocidad que lleva el móvil en el instante que estamos estudiando (velocidad instantánea).

Matemáticamente, esta operación se calcula mediante un paso al límite. $\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

Esta operación se denomina derivada (en este caso “derivada de la posición respecto al tiempo”).

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

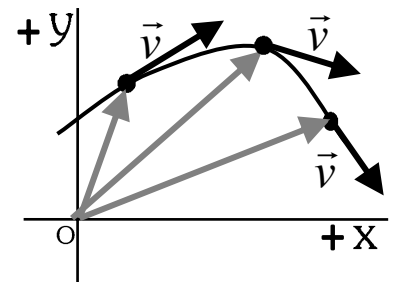
<p>Nota: Derivada de una función. $\frac{d f(t)}{dt}$</p> <p>La derivada respecto al tiempo de una función nos indica cómo cambia esa función respecto al tiempo. Es una operación que tiene sus propias reglas de cálculo, de las que sólo vamos a ver brevemente las que nos interesan).</p>	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th style="padding: 5px;">Función: $f(t)$</th> <th style="padding: 5px;">Derivada: $df(t)/dt$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="padding: 5px;">$a = cte$</td> <td style="padding: 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">t</td> <td style="padding: 5px;">1</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$a \cdot t$</td> <td style="padding: 5px;">a</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$a \cdot t^n$</td> <td style="padding: 5px;">$a \cdot n \cdot t^{n-1}$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$\sqrt{f(t)}$</td> <td style="padding: 5px;">$\frac{df/dt}{2\sqrt{f(t)}}$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$f(t) \pm g(t)$</td> <td style="padding: 5px;">$df/dt \pm dg/dt$</td> </tr> </tbody> </table>	Función: $f(t)$	Derivada: $df(t)/dt$	$a = cte$	0	t	1	$a \cdot t$	a	$a \cdot t^n$	$a \cdot n \cdot t^{n-1}$	$\sqrt{f(t)}$	$\frac{df/dt}{2\sqrt{f(t)}}$	$f(t) \pm g(t)$	$df/dt \pm dg/dt$
Función: $f(t)$	Derivada: $df(t)/dt$														
$a = cte$	0														
t	1														
$a \cdot t$	a														
$a \cdot t^n$	$a \cdot n \cdot t^{n-1}$														
$\sqrt{f(t)}$	$\frac{df/dt}{2\sqrt{f(t)}}$														
$f(t) \pm g(t)$	$df/dt \pm dg/dt$														

Teniendo en cuenta que el vector de posición tiene dos componentes $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, la velocidad también tendrá dos componentes.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$$

Recordemos que la velocidad es una magnitud vectorial.

- Su módulo ($|\vec{v}| = v$) se denomina rapidez. Se mide en m/s.
- Su dirección y sentido nos indican hacia dónde se mueve la partícula en ese momento. El vector velocidad es tangente a la trayectoria en cada punto.



6.3. ACELERACIÓN. COMPONENTES INTRÍNSECAS DE LA ACELERACIÓN.

Introducción:

Supongamos un movimiento en el que la velocidad se mantiene constante en todo momento. Eso significa

- Que recorre los mismos metros en cada segundo (rapidez constante)
- Que la dirección y sentido del movimiento se mantienen constantes, no cambian. Su trayectoria es recta.

No podemos olvidar este segundo aspecto de la velocidad. Un automóvil que toma una curva manteniendo su rapidez a 60 km/h, NO lleva velocidad constante, ya que hay algo que cambia en la velocidad: su dirección.

Para estudiar los cambios en la velocidad (ya sea en módulo o en dirección) usamos una magnitud vectorial: la aceleración.

Nota: Es importante tener en cuenta que el concepto de aceleración no tiene por qué significar que el movimiento sea más rápido. Puede ser también un frenado, o puede que la rapidez sea constante y cambie la dirección.

6.3.1 Aceleración media: (\vec{a}_m)

Mide el cambio de velocidad en un intervalo de tiempo. $\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0}$

Unidades: En el S.I. $[a_m] = m/s^2 = m \cdot s^{-2}$

Al igual que en el caso de la velocidad, la aceleración media sólo tiene en cuenta los instantes inicial y final, independientemente de cómo haya sido el movimiento entre ambos instantes.

6.3.2 Aceleración instantánea (\vec{a}):

Indica cómo cambia la velocidad del móvil en un instante determinado. Al igual que en el caso de la velocidad instantánea, se calcula mediante un paso al límite.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Es decir, la aceleración mide cómo cambia la velocidad de móvil en cada instante, ya sea porque cambia su módulo (rapidez) o su dirección.

Se mide en las mismas unidades que la aceleración media. $[a_m] = m/s^2 = m \cdot s^{-2}$

Por ejemplo, si el módulo de una aceleración es de 2 m/s^2 , significa que su rapidez cambia en 2 m/s por cada segundo de tiempo que pasa. La aceleración NO nos dice nada sobre distancia recorrida

Importante: Es preciso tener muy claro que la aceleración NO nos dice cómo se mueve la partícula ni hacia dónde se mueve. Eso es la velocidad. La aceleración nos informa de si la velocidad cambia, de qué modo y hacia dónde está cambiando.

El vector aceleración tiene componentes cartesianas x e y.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$

6.3.3 Componentes intrínsecas de la aceleración: aceleraciones tangencial (\vec{a}_t) y normal (\vec{a}_n)

Cuando en un movimiento cambia la velocidad, puede ser que cambie su rapidez, su dirección, o ambas cosas. Podemos estudiar estos cambios por separado, descomponiendo la aceleración como la suma de dos componentes distintas de las cartesianas, denominadas componentes intrínsecas:

- Aceleración tangencial (\vec{a}_t):

- Lleva la misma dirección del vector velocidad (puede ir en el mismo sentido o en el opuesto). NO modifica la dirección del movimiento.
- Modifica la rapidez (el módulo de la velocidad). Hace que el movimiento sea más rápido o más lento.
 - Si el sentido de \vec{a}_t coincide con el de $\vec{v} \rightarrow$ aumenta la rapidez
 - Si el sentido de \vec{a}_t es el opuesto al de $\vec{v} \rightarrow$ disminuye la rapidez

En módulo, se calcula con $a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$

Por ejemplo, al pisar el acelerador o el freno de un coche originamos una aceleración tangencial. Varía la rapidez, pero no cambia la dirección.

- Aceleración normal (o centrípeta) (\vec{a}_n):

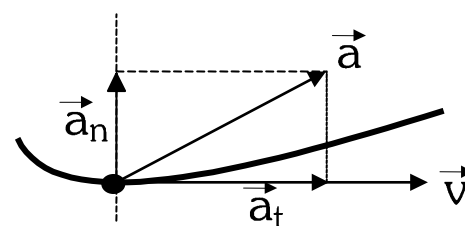
- Lleva dirección perpendicular (=normal) a la velocidad. Modifica la dirección del movimiento, indicando hacia dónde se desvía. Apunta hacia el centro de la curva.
- NO modifica la rapidez (el módulo de la velocidad).

En módulo, se calcula con $a_n = \frac{v^2}{R}$ donde R es el radio de la curva que describe en ese momento

Por ejemplo, al girar el volante del coche originamos una aceleración normal, que hace variar la dirección del movimiento.

La suma de ambas componentes es, lógicamente, el vector aceleración:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \rightarrow \text{en módulo } a^2 = a_t^2 + a_n^2$$



6.4 CLASIFICACIÓN DE MOVIMIENTOS:

Existen múltiples clasificaciones posibles para los movimientos. Veremos dos de ellas.

Según los valores de \vec{a} y \vec{v} :

- $\vec{a} = 0$ $\vec{v} = \text{cte} = 0$. → Estado de reposo.
- $\vec{v} = \text{cte} \neq 0$. → Movimiento rectilíneo uniforme (MRU):
- $\vec{a} = \text{cte} \neq 0$ → Movimiento uniformemente acelerado (MUA)
 - Si \vec{v}_0 y \vec{a} van en la misma dirección → Trayectoria recta (MRUA)
 - Si \vec{v}_0 y \vec{a} tienen direcciones distintas → Trayectoria curva Movimiento parabólico
- $\vec{a} \neq \text{cte}$ Movimiento variado.

Según los valores de \vec{a}_t y \vec{a}_n :

- $\vec{a}_t = 0$ Rapidez constante. Movimiento uniforme (no tiene por qué ser rectilíneo)
 - $\vec{a}_t = 0$ y $|\vec{a}_n| = \text{cte}$ → $v = \text{cte}$, $R = \text{cte}$ → Movimiento circular uniforme (MCU)
- $\vec{a}_n = 0$ Trayectoria recta → Movimiento rectilíneo (no tiene por qué ser uniforme).
- \vec{a}_t y \vec{a}_n variables → Movimiento variado.

6.5 MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME (MRU):

Este tipo de movimiento se caracteriza por una velocidad constante en módulo, dirección y sentido. Por tanto:

Su aceleración es nula ($\vec{a} = 0$)

Su rapidez es constante (recorre la misma distancia en cada segundo)

Su trayectoria es rectilínea (al ser constante la dirección de la velocidad en todo momento).

Ecuación del MRU: Sabiendo que el vector velocidad se mantiene constante ($\vec{v} = \text{cte}$)

$$\vec{v} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{t - t_0} \rightarrow \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v} \cdot (t - t_0) \rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v} \cdot (t - t_0) \quad \text{Si } t_0 = 0 \rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v} \cdot t$$

6.6 MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO (MUA):

Este tipo de movimiento se caracteriza porque posee aceleración constante en módulo, dirección y sentido. ($\vec{a} = \text{cte}$)

La velocidad (vector) varía a ritmo constante.

La **rapidez** del movimiento (v) varía, aumentando o disminuyendo.

La **trayectoria** que sigue depende de las direcciones de \vec{v}_0 y \vec{a} :

- Si $\vec{v}_0 = 0$ → Trayectoria rectilínea
- Si \vec{v}_0 y \vec{a} van en la misma dirección (son paralelos) → Trayectoria rectilínea
- Si \vec{v}_0 y \vec{a} van en direcciones distintas → Trayectoria curvilínea (parabólica)

Ecuaciones del M.U.A:

Ecuación de la velocidad: Sabiendo que $\vec{a} = \text{cte}$:

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0} \rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot (t - t_0) \quad \text{Si } t_0 = 0 \rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$$

Ecuación de la posición:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot (t - t_0)^2 \quad \text{Si } t_0 = 0 \rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot t^2$$

Puede comprobarse que, lógicamente, al derivar la ecuación del movimiento obtenemos la de la velocidad.

CASOS ESPECIALES DENTRO DEL M.U.A:

Si bien todos los movimientos que tengan aceleración constante obedecen a las ecuaciones expresadas anteriormente, y resolveremos los problemas del mismo modo, podemos establecer algunos casos particulares de MUA que tienen especial interés.

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (M.R.U.A):

En este movimiento la trayectoria es rectilínea, ya que la velocidad y la aceleración son paralelas. Es el caso, por ejemplo, de un automóvil que se desplaza en línea recta y pisa el acelerador, o el freno.

Para estos movimientos es bueno escoger un sistema de referencia de forma que uno de los ejes (x o y) coincida con la dirección de la trayectoria. Así, todos los vectores tendrá el mismo vector unitario (\vec{i} o \vec{j}), facilitando la resolución del problema.

Movimientos de caída libre:

Estos movimientos están sometidos únicamente a la aceleración de la gravedad ($\vec{a} = \vec{g}$). Aunque el valor de la gravedad varía con la altura, siempre que no nos alejemos mucho de la superficie del planeta (es decir, hasta una altura de algunos km), podemos considerar que su valor se mantiene constante. Al nivel de la superficie terrestre el valor del módulo de la aceleración gravitatoria es de $9,8 \text{ m s}^{-2} \sim 10 \text{ m s}^{-2}$

(Nota: El valor de la gravedad en la superficie de un planeta depende de la masa y del radio de dicho planeta)

En los problemas de caída libre, siempre consideraremos que el rozamiento con el aire es despreciable, y no lo tendremos en cuenta

La trayectoria que sigue un cuerpo en caída libre depende de la dirección de su velocidad inicial, caso de que tenga. Esto ya lo hemos estudiado anteriormente, para un MUA en general:

Si $\vec{v}_0 = 0$	→ Trayectoria rectilínea
Si \vec{v}_0 y \vec{g} van en la misma dirección (son paralelos)	→ Trayectoria rectilínea
Si \vec{v}_0 y \vec{g} van en direcciones distintas	→ Trayectoria curvilínea (parabólica)

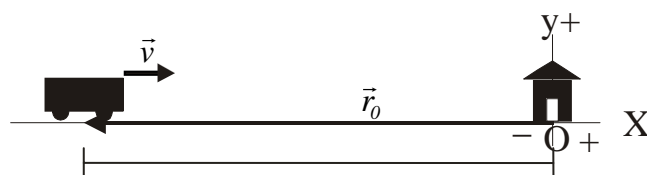
6.7 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SOBRE MOVIMIENTO EN UNA O DOS DIMENSIONES:**Pasos a seguir.**

- 1º- Esquema del problema, indicando claramente el sistema de referencia y criterio de signos. (Esto es fundamental, ya que todos los datos y magnitudes del problema los calcularemos según ese sistema de referencia. No se puede cambiar durante el problema).
- 2º- Datos del problema (tipo de movimiento, posición inicial, velocidad, inicial, aceleración). Todas esas son magnitudes vectoriales, deben llevar vectores unitarios según el sistema de referencia escogido, además de sus unidades. Es posible que haya que descomponer algún vector en componentes x e y (suele ocurrir con la velocidad inicial).
- 3º- Ecuación del movimiento y ecuación de velocidad: sustituir los datos y descomponer (ecuaciones paramétricas).
- 4º- A partir de estas ecuaciones, calculamos lo que nos pide el problema (en muchas ocasiones, un dato servirá para calcular el valor del tiempo en una de las ecuaciones, y sustituirlo luego en otra ecuación).

Ejemplo: Resolución de un movimiento rectilíneo uniforme:

Un tren se aproxima a la estación con una velocidad constante de 72 km/h. Inicialmente se encuentra a 5 km de la estación. Calcule: a) Ecuación de movimiento del tren. b) Posición al cabo de 1 minuto c)

Desplazamiento en ese tiempo d) Tiempo que tarda en llegar a la estación, suponiendo que mantiene constante la velocidad.



En este caso, hemos colocado el sistema de referencia en la estación.

Datos iniciales (en unidades S.I.): (72 km/h = 20 m/s)

$$\vec{r}_0 = -5000 \vec{i} \text{ m}, \quad \vec{v} = 20 \vec{i} \text{ m/s} = \text{cte}, \quad t_0 = 0$$

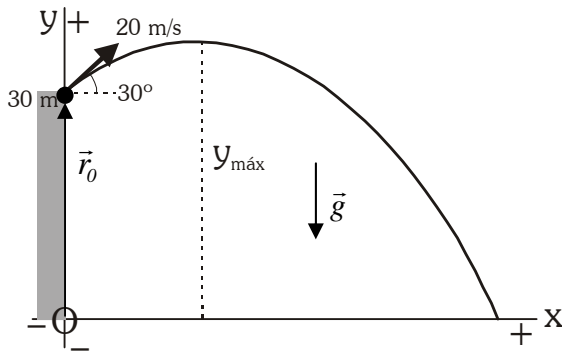
Se trata de un movimiento rectilíneo uniforme (MRU), ya que la velocidad se mantiene constante en módulo y dirección.

a) Ecuación de movimiento: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v} \cdot t \rightarrow \vec{r} = -5000 \vec{i} + 20 t \vec{i} \text{ (m)} \rightarrow x = -5000 + 20 t \text{ (m)}$

- b) Para $t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s} \rightarrow x(60) = -3800 \text{ m}$; $\vec{r}(60) = -3800 \vec{i} \text{ m}$. Se encuentra a 3800 m de la estación.
- c) $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = -3800 \vec{i} - (-5000 \vec{i}) \text{ m} = 1200 \vec{i} \text{ m}$; $\Delta r = 1200 \text{ m}$. Se ha desplazado 1200 m en sentido positivo.
- d) Cuando llega a la estación: $x = 0 \rightarrow -5000 + 20t = 0 \rightarrow t = 250 \text{ s}$ tarda en llegar a la estación.

Ejemplo: Resolución de un movimiento de caída libre (parabólico):

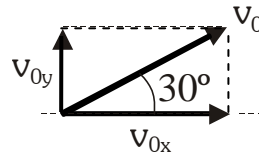
Desde un acantilado de 30 m de altura sobre el nivel del mar, se lanza una piedra hacia el mar, con una velocidad de 20 m/s y formando un ángulo de 30° con la horizontal. Calcular la altura máxima que alcanza y a qué distancia del acantilado caerá la piedra.



[Colocamos el sistema de referencia en la base del acantilado (de esta forma las coordenadas x e y de la piedra serán siempre positivas)]

Datos iniciales: $\vec{r}_0 = 30 \vec{j} \text{ m}$; $\vec{a} = \vec{g} = -10 \vec{j} \text{ m s}^{-2} = \text{cte}$, $t_0 = 0$

Descomponemos \vec{v}_0 : $v_{0x} = 20 \cdot \cos 30^\circ = 17,32 \text{ m/s}$
 $v_{0y} = 20 \cdot \sin 30^\circ = 10 \text{ m/s}$
 [ambas componentes son positivas]
 $\vec{v}_0 = 17,32 \vec{i} + 10 \vec{j} \text{ m s}^{-1}$



Se trata de un movimiento uniformemente acelerado, ya que la aceleración es constante.

Sigue una trayectoria parabólica, pues \vec{v}_0 y \vec{a} no van en la misma dirección.

Ecuaciones:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot t^2 \rightarrow \vec{r} = 30 \vec{j} + 17,32 \cdot t \vec{i} + 10 \cdot t \vec{j} - 5 \cdot t^2 \vec{j} \text{ (m)} \rightarrow \begin{aligned} x &= 17,32 \cdot t \text{ (m)} \\ y &= 30 + 10 \cdot t - 5 t^2 \text{ (m)} \end{aligned}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t \rightarrow \vec{v} = 17,32 \vec{i} + 10 \vec{j} - 10 \cdot t \vec{j} \rightarrow \begin{aligned} v_x &= 17,32 \text{ m/s} = \text{cte} \\ v_y &= 10 - 10 \cdot t \text{ m/s} \end{aligned}$$

[Es decir, la piedra lleva un movimiento uniforme en el eje x (siempre avanza al mismo ritmo en horizontal) y un movimiento acelerado en el eje y, ya que la aceleración va sólo en vertical.]

Cálculo de la altura máxima:

[En el punto de altura máxima, se cumple que la componente vertical de la velocidad se anula] $v_y = 0$
 $v_y = 10 - 10 \cdot t = 0 \rightarrow t = 1 \text{ s}$. [tarda 1 s en alcanzar su altura (y) máxima. Sustituimos en la ecuación de y]
 $y = 30 + 10 \cdot t - 5 t^2 = 35 \text{ m}$. = $y_{\text{máx}}$ [En ese momento está a 35 m de altura sobre el mar.]

Cálculo del punto de impacto con el mar (alcance horizontal):

Cuando llega a la superficie del mar, se cumple que su altura es cero ($y = 0$).

$y = 30 + 10 \cdot t - 5 t^2 = 0 \rightarrow t = 3,65 \text{ s}$ [se desprecia la otra solución $t = -1,65 \text{ s}$, que carece de sentido]

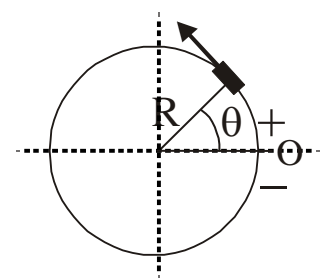
Sustituimos en x $x = 17,32 \cdot t = 63,22 \text{ m}$. Caerá a esa distancia horizontal desde la base del acantilado.

6.8. MOVIMIENTOS CIRCULARES:

6.8.1 MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME (M.C.U):

El movimiento circular uniforme (MCU) es un movimiento acelerado (la dirección de la velocidad cambia), dotado únicamente de aceleración centrípeta (aceleración normal). La trayectoria que describe es una curva de radio constante: una circunferencia.

Un movimiento circular es más sencillo de estudiar si usamos coordenadas polares (en lugar de coordenadas x e y, usamos el radio y el ángulo que forma con uno de los ejes, normalmente el semieje x +). Como el radio de la circunferencia que describe se mantiene constante (R), para indicar la posición del móvil

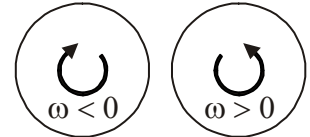


en la circunferencia sólo tendremos que dar el valor del ángulo θ , que se denomina **posición angular** y se mide en radianes (rad) ($2\pi \text{ rad} \rightarrow 360^\circ$)

El desplazamiento angular entre dos posiciones se calcula como la diferencia entre las mismas $\Delta\theta = \theta - \theta_0$

La rapidez con que varía el ángulo θ descrito proporciona una medida de la velocidad del movimiento circular. A esa velocidad relacionada con el ángulo se la denominará "**velocidad angular**", que se simboliza como ω y que, en términos de velocidad angular media, se expresa como:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta - \theta_0}{t - t_0} \quad \text{Unidades (S.I.) = radián por segundo (rad}\cdot\text{s}^{-1}\text{)}$$



Ecuación del movimiento circular uniforme : Sabemos que en un MCU, la velocidad angular es constante.

Despejando:

$$\theta - \theta_0 = \omega \cdot (t - t_0) \rightarrow \theta = \theta_0 + \omega \cdot (t - t_0) \quad \text{En el caso de que } t_0 = 0. \quad \rightarrow \quad \theta = \theta_0 + \omega \cdot t$$

Magnitudes asociadas al M.C.U: Al tratarse de un movimiento periódico, que se repite cada cierto tiempo, podemos definir:

• **Período (T)**: Tiempo que tarda el cuerpo en dar una vuelta completa (o repetir su posición). En el S.I. se mide en segundos. $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

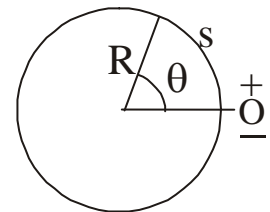
• **Frecuencia (ν)**: Es la magnitud inversa del periodo. Indica el número de vueltas (o número de veces que se repite una posición) por unidad de tiempo.

$$\nu = \frac{1}{T} \quad ; \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{Unidad en el S.I: } 1/\text{s} = \text{s}^{-1} \text{ (también se denomina hertzio (Hz)).}$$

Relación entre magnitudes angulares y lineales:

Posición y desplazamiento sobre la trayectoria: $s = \theta \cdot R$; $\Delta s = \Delta\theta \cdot R$

Velocidad lineal (rapidez, v) $v = \omega \cdot R$



6.8.2 MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE ACELERADO (MCUA).

Cuando la velocidad angular de un cuerpo que se mueve describiendo círculos varía, se dice que está dotado de **aceleración angular**, que se simboliza con la letra α . Indica cómo varía la velocidad angular con el tiempo.

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0}$$

La unidad de la aceleración angular en el sistema internacional es el **radián por segundo al cuadrado (rad/s²)**. Si α es constante, se dice que el **movimiento circular es uniformemente acelerado (MCUA)**

Ecuaciones del MCUA:

$$\begin{array}{l} \text{Posición: } \theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \alpha \cdot (t - t_0)^2 \\ \text{Velocidad: } \omega = \omega_0 + \alpha \cdot (t - t_0) \end{array} \quad \xrightarrow{\text{Si } t_0 = 0} \quad \begin{array}{l} \theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \alpha \cdot t^2 \\ \omega = \omega_0 + \alpha \cdot t \end{array}$$

Relación entre magnitudes angulares y lineales:

Aceleración tangencial: $a_t = \alpha \cdot R$

Aceleración normal: $a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R$

EJERCICIOS:

- 1.-** Un móvil se mueve con $\vec{r} = 3t \vec{i} + (2t^2 + 3) \vec{j}$ (m). Calcular:
- Vector de posición inicial.
 - Ídem a los 5 segundos.
 - Vector desplazamiento en el intervalo $t=0$ y $t=5$ s, y su módulo.
 - Ecuaciones paramétricas.
 - Ecuación de la trayectoria.
- 2.-** Las ecuaciones paramétricas para el movimiento de una partícula son, en unidades del S.I.: $x = t + 1$; $y = t^2$. Escribe la expresión del vector de posición y halla la ecuación de la trayectoria.
- 3.-** La Ecuación del movimiento de un objeto viene dada por: $\vec{r} = 3\vec{i} + 2t\vec{j}$ (m). Calcula:
- la ecuación de la Trayectoria
 - Vector de posición en $t=0$ y en $t=4$ s.
 - Vector desplazamiento para ese intervalo. ¿Coincide el módulo del vector desplazamiento con la distancia recorrida? Razona por qué.
- 4.-** El vector de posición de una partícula en cualquier instante viene dado por $\vec{r} = 5t^2\vec{i} + 6t\vec{j}$, donde \vec{r} se expresa en metros y t en segundos. Calcula la velocidad con que se mueve la partícula en cualquier instante y su módulo en el instante $t=2$ s.
- 5.** El movimiento de una partícula viene dado por $\vec{r} = 2t\vec{i} + (5-t^2)\vec{j}$ (m). Calcula:
- Ecuaciones paramétricas.
 - Dibuja aproximadamente la trayectoria que describe el movimiento.
 - Desplazamiento durante el tercer segundo de su movimiento.
- 6.-** La ecuación del movimiento de un objeto es: $\vec{r} = 3t^2\vec{i} + 2t\vec{j}$ (m). Calcula:
- Velocidad media entre $t=2$ s y $t=5$ s.
 - Módulo del vector velocidad media entre $t=2$ s y $t=5$ s.
 - Velocidad instantánea y su módulo.
 - Velocidad en $t=3$ s y su módulo.
- 7.-** La ecuación de movimiento de un móvil es $\vec{r} = (2t - 4)\vec{i} + (t^2 - 3t)\vec{j}$ (m). Calcular:
- Vector de posición inicial.
 - Ídem a los 3 segundos.
 - Vector desplazamiento en el intervalo $t=0$ y $t=3$ s, y su módulo.
 - Ecuaciones paramétricas.
 - Ecuación de la trayectoria.
- 8.-** Las posiciones que ocupa un móvil vienen dadas por: $x = 1/2t^2 - 3$; $y = t - 2$ (m). Averiguar:
- Vector de posición del móvil a los dos segundos.
 - Ecuación de la trayectoria.
 - Velocidad a los dos segundos y el valor del módulo en ese instante.
- 9.-** La ecuación del movimiento de un móvil es: $\vec{r} = (6t^3 + 8t^2 + 2t - 5)\vec{i}$ (m). Calcular:
- El valor del vector de posición, el vector velocidad y el vector aceleración para $t=3$ s.
 - Módulo de cada uno de los vectores.
- 10.-** Un móvil se mueve sobre un plano, las componentes de la velocidad son, $v_x = t^2$ (m/s); $v_y = 2$ m/s. Calcular:
- Aceleración media durante el primer segundo.
 - Vector aceleración y su módulo para $t = 1$ s.
 - El módulo de las aceleraciones tangencial y normal para $t=1$ s.
 - El radio de curvatura de la trayectoria para $t = 1$ s.
- 11.-** Un punto en su movimiento tiene la siguiente ecuación de movimiento $\vec{r} = t^3\vec{i} + 2t^2\vec{j}$ (m). Si la aceleración normal del punto al cabo de 2 s es de $16,2$ m/s². ¿Cuál es el radio de curvatura de la trayectoria en ese punto?

- 12.-**La posición de un punto que se mueve en línea recta a lo largo del eje de abscisas (eje horizontal varía con el tiempo, según la ecuación: $x = 4t^2 - 3t + 11$, donde x se expresa en metros y t en segundos.
- Calcula la velocidad y la aceleración con que se mueve el punto en cualquier instante.
 - Valor de la velocidad y aceleración para $t=2$ s y $t=3$ s.
- 13.-**Calcular la velocidad y la aceleración de un móvil conociendo la ecuación del movimiento del mismo:
 $\vec{r} = (t - 5) \vec{i} + (2t^3 - 3t) \vec{j}$ (m).
- 14.-**La posición de una partícula, viene dada por las siguientes ecuaciones paramétricas (S.I.):
 $x = t^2$; $y = 3t$; $z=5$
 Hallar la posición, velocidad y aceleración de la partícula a los 2 s.
- 15.-**El vector de posición de un punto es $\vec{r} = (t + 1) \vec{i} + t^2 \vec{j} + (t^4 - 4t^2) \vec{k}$ (m). Calcular:
- Posición, velocidad y aceleración en $t=2$ s (vector y módulo).
 - Velocidad media entre $t=2$ s y $t=5$ s y su módulo.

SOLUCIONES: Problemas 1 al 15:

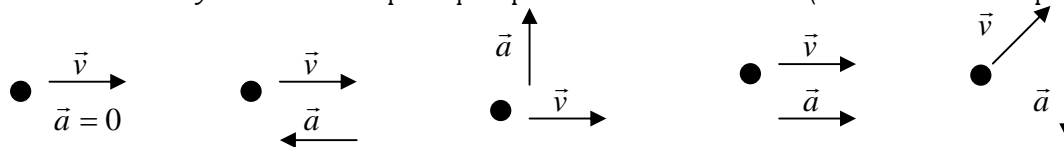
- $\vec{r}_0 = 3 \vec{j}$ m ;
 - $\vec{r}(5) = 15 \vec{i} + 53 \vec{j}$ m ;
 - $\Delta \vec{r} = 15 \vec{i} + 50 \vec{j}$ m , $\Delta r = 52,2$ m ;
 - $x = 3t$ (m) , $y = 2t^2 + 3$ (m)
 - $y = 2/9 x^2 + 3$
- $\vec{r}(t) = (t + 1) \vec{i} + t^2 \vec{j}$; $y = x^2 - 2x + 1$
- $x = 3$;
 - $\vec{r}_0 = 3 \vec{i}$ m , $\vec{r}(4) = 3 \vec{i} + 8 \vec{j}$ (m) ;
 - $\Delta \vec{r} = 8 \vec{j}$ m , $\Delta r = 8$ m. Coinciden
- $\vec{v} = 10t \vec{i} + 6 \vec{j}$ m s⁻¹ ; $\vec{v}(2) = 20 \vec{i} + 6 \vec{j}$ m s⁻¹ ; $v = 20,88$ m s⁻¹
- $x = 2t$ (m) , $y = 5 - t^2$ (m) ;
 - La curva es una parábola ;
 - $\Delta \vec{r} = \vec{r}(3) - \vec{r}(2) = 2 \vec{i} - 5 \vec{j}$ m.
- $\vec{v}_m = 21 \vec{i} + 2 \vec{j}$ m s⁻¹ ;
 - $v = 21,1$ m s⁻¹ ;
 - $\vec{v}(t) = 6t \vec{i} + 2 \vec{j}$ m s⁻¹ $v = \sqrt{36t^2 + 4}$ m s⁻¹
 - $\vec{v}(3) = 18 \vec{i} + 2 \vec{j}$ m s⁻¹ , $v(3) = 18,11$ m s⁻¹
- $\vec{r}_0 = -4 \vec{i}$ m ;
 - $\vec{r}(3) = 2 \vec{i}$ m ;
 - $\Delta \vec{r} = 6 \vec{i}$ m , $\Delta r = 6$ m. ;
 - $x = 2t - 4$ m , $y = t^2 - 3t$ m
 - $y = 1/4 x^2 + 1/2 x - 2$ (m)
- $\vec{r}(2) = -\vec{i}$ m ;
 - $y = \sqrt{2x+6} - 2$; o también $x = 1/2 y^2 + 2y - 1$
 - $\vec{v}(2) = 2 \vec{i} + \vec{j}$ m s⁻¹ ; $v(2) = 2,24$ m s⁻¹
- $\vec{r}(3) = 235 \vec{i}$ m , $\vec{v}(3) = 212 \vec{i}$ m s⁻¹ , $\vec{a}(3) = 124 \vec{i}$ m s⁻² ;
 - $r(3) = 235$ m , $v(3) = 212$ m s⁻¹ , $a(3) = 124$ m s⁻²
- $\vec{a}_m = \vec{i}$ m s⁻² ;
 - $\vec{a}(t) = 2t \vec{i}$ m s⁻² , $a(1) = 2$ m s⁻² ;
 - $a_t(1) = 0,894$ m s⁻² , $a_n(1) = 1,789$ m s⁻²
 - $R(1) = 2,79$ m.
- $R = 12,84$ m.
- $\vec{r}(t) = 4t^2 - 3t + 11$ (m) ;
 - $\vec{v}(t) = (8t - 3) \vec{i}$ m s⁻¹ , $\vec{a} = 8 \vec{i}$ m s⁻² ;
 - $\vec{v}(2) = 13 \vec{i}$ m s⁻¹ , $\vec{v}(3) = 21 \vec{i}$ m s⁻¹ ; $\vec{a}(2) = \vec{a}(3) = 8 \vec{i}$ m s⁻² = cte.
- $\vec{v}(t) = \vec{i} + (6t^2 - 3) \vec{j}$ m s⁻¹ , $\vec{a}(t) = 12t \vec{j}$ m s⁻²
- $\vec{r}(2) = 4 \vec{i} + 6 \vec{j} + 5 \vec{k}$ m ; $\vec{v}(2) = 4 \vec{i} + 3 \vec{j}$ m s⁻¹ ; $\vec{a} = 2 \vec{i}$ m s⁻²
- $\vec{r}(2) = 3 \vec{i} + 4 \vec{j}$ m , $r(2) = 5$ m ; $\vec{v}(2) = \vec{i} + 4 \vec{j} + 16 \vec{k}$ m s⁻¹ , $v(2) = 16,52$ m s⁻¹ ;
 - $\vec{a}(2) = 2 \vec{j} + 40 \vec{k}$ m s⁻² , $a(2) = 40,05$ m s⁻² ;
 - $\vec{v}_m = \vec{i} + 7 \vec{j} + 175 \vec{k}$ m s⁻¹ , $v_m = 175,14$ m/s

EJERCICIOS:**Sobre tipos de movimiento**

16. ¿Cómo será la trayectoria de un movimiento con las siguientes características?:

- a) $\vec{a} = 0$ b) $a_n = 0$ c) $a_t = 0$, $a_n = \text{cte}$ d) $a_t = 0$, a_n aumentando
 e) $\vec{a} = \text{cte}$ y paralela a \vec{v}_0 , f) $\vec{a} = \text{cte}$ y no paralela a \vec{v}_0 .

17. Dibuja la trayectoria aproximada que seguiría en cada caso el punto móvil de la figura, atendiendo a los datos de velocidad inicial y aceleración. Explica qué tipo de movimiento llevará (la aceleración se supone constante).



18. Un móvil se mueve con velocidad constante de módulo 2 m/s y formando 30° con el eje y. Cuando comenzamos a estudiar el movimiento, se encuentra sobre el eje x, a 3 m de distancia del origen en sentido positivo. Razona de qué tipo de movimiento se trata y calcula su ecuación de movimiento. ($\vec{r} = (3+t)\vec{i} + 1,73 t \vec{j}$ m (existen otras soluciones))

19.- En un movimiento se sabe que: $\vec{a}_n = 0$, $\vec{a}_t = 2 \vec{i}$ (m/s²), y en el instante inicial se cumple que

$$\vec{v}_0 = 2 \vec{i} \text{ m/s y } \vec{r}_0 = \vec{i} + \vec{j} \text{ m}$$

Razona de qué tipo de movimiento se trata y calcula \vec{v} y \vec{r} para cualquier instante.

$$(\vec{r} = (1 + 2t + t^2)\vec{i} + \vec{j} \text{ m ; } \vec{v} = (2 + 2t)\vec{i} \text{ m/s})$$

20. De un movimiento sabemos que se encuentra sometido únicamente a la acción de la gravedad, y que inicialmente se encontraba en el origen, moviéndose con una velocidad $\vec{v}_0 = 3 \vec{i} - \vec{j}$ m/s. Razona de qué tipo de movimiento se trata y calcula \vec{r} y \vec{v} para cualquier instante. ($\vec{r} = 3t\vec{i} + (-t - 5t^2)\vec{j}$ m ; $\vec{v} = 3\vec{i} + (-1 - 10t)\vec{j}$ m/s)

Sobre movimientos en una dimensión

21. Un tren que marcha por una vía recta a una velocidad de 72 km/h se encuentra, cuando comenzamos a estudiar su movimiento, a 3 km de la estación, alejándose de ésta. Calcula:

- a) Ecuación de movimiento del tren. ($\vec{r} = (3000 + 20t)\vec{i}$ m.)
 b) Tiempo que hace que pasó por la estación, suponiendo que siempre lleva movimiento uniforme. (2 min 30 s.)

22. Un ciclista se mueve en línea recta, y acelera pasando de 15 km/h a 45 km/h en 10 s. Calcular, en unidades del S.I.:

- a) Aceleración del ciclista, supuesta constante. ($\vec{a} = 0,83 \vec{i} \text{ m s}^{-2}$)
 b) Distancia recorrida en ese tiempo. ($\Delta r = 83,2 \text{ m}$)
 c) Si pasados esos 10 s, el ciclista frena hasta detenerse en 5 s, calcular la aceleración de frenado y la distancia recorrida desde que comenzó a frenar hasta que se para. ($\vec{a} = -2,5 \vec{i} \text{ m s}^{-2}$, $\Delta r = 31,25 \text{ m}$)

23.-Un coche que lleva una velocidad de 144 km/h, frena; y después de recorrer 160m se para. Calcular:

- a) La aceleración, supuesta constante. ($\vec{a} = -5 \vec{i} \text{ m s}^{-2}$)
 b) Tiempo invertido por el móvil en el frenado. (8 s)

24. Un automóvil circula a 72 km/h. En ese momento, el conductor ve un obstáculo en la carretera y pisa el freno hasta que el coche se detiene. Suponiendo que el tiempo de reacción del automovilista es de 0,5 s, y que la aceleración de frenado es (en módulo) de 5 m/s², calcular:

- a) Distancia recorrida durante el tiempo de reacción (durante ese tiempo aún no ha pisado el freno). (10 m)
 b) Tiempo total que tarda el coche en detenerse. (4,5 s)
 c) Distancia total que recorre el coche hasta que se para. (50 m)
 d) Velocidad y posición del automóvil al cabo de 2 s desde que empezamos a estudiar este movimiento.

$$(\vec{v} = 12,5 \vec{i} \text{ m s}^{-1} ; \vec{r} = 34,38 \vec{i} \text{ m})$$

25. Dejamos caer en caída libre un cuerpo desde una torre de 30 m. Despreciando el rozamiento con el aire, calcular:

- a) Tiempo que tarda en llegar al suelo y velocidad con la que llega. $(t = 2,45 \text{ s}; \vec{v} = -24,5 \vec{j} \text{ m s}^{-1})$
 b) Posición y velocidad al cabo de 1,5 s de iniciado el movimiento. $(\vec{r} = 18,75 \vec{j} \text{ m}; \vec{v} = -15 \vec{j} \text{ m s}^{-1})$
 c) Velocidad que lleva cuando su altura es de 15 m. $(\vec{v} = -17,32 \vec{j} \text{ m s}^{-1})$

26. Repite el problema anteriores si inicialmente impulsamos hacia abajo la piedra con una velocidad de 10 m/s.

a) $t = 1,65 \text{ s}; \vec{v} = -26,5 \vec{j} \text{ m s}^{-1};$ b) $\vec{r} = 3,75 \vec{j} \text{ m}; \vec{v} = -25 \vec{j} \text{ m s}^{-1};$ c) $\vec{v} = -20 \vec{j} \text{ m s}^{-1}$

27. Lanzamos una piedra verticalmente hacia arriba con una velocidad de 12 m s^{-1} . Despreciamos el rozamiento con el aire. Calcular:

- a) Altura máxima que alcanza y tiempo que tarda en alcanzarla. $(7,2 \text{ m}; 1,2 \text{ s})$
 b) Velocidad y posición de la piedra al cabo de 1 s de empezar el movimiento. $(\vec{v} = 2 \vec{j} \text{ m/s}; \vec{r} = 7 \vec{j} \text{ m})$
 c) Tiempo que tarda en llegar de nuevo al suelo y velocidad que lleva en el momento de chocar con él.
 $(t = 2,4 \text{ s}; \vec{v} = -12 \vec{j} \text{ m/s})$

28. Lanzamos desde el suelo una piedra verticalmente hacia arriba, alcanzando una altura de 20 m. ¿Con qué velocidad se lanzó? ¿qué tiempo tarda en alcanzar su altura máxima? $(t = 2 \text{ s}; \vec{v}_0 = 20 \vec{j} \text{ m s}^{-1})$

29. Una grúa eleva a un albañil con una velocidad vertical de 2 m/s. Cuando se halla a 10 m sobre el suelo, se le cae el bocado. Calcular el tiempo que tarda el bocado en llegar al suelo y con qué velocidad lo hará.

$(t = 1,63 \text{ s}; \vec{v} = -14,3 \vec{j} \text{ m/s})$

30. Desde un globo aerostático que asciende con una velocidad de 5 m/s se suelta uno de los sacos de lastre. Si desde que se suelta hasta que llega al suelo transcurren 10 s, calcula la altura a la que se encontraba el globo en el momento de la caída. (450 m)

31. Un objeto se desplaza sobre el eje x con un movimiento que viene dado por $x = 4t - t^2$ (S.I.). Calcular:

- a) ¿En qué instante se invierte el sentido del movimiento? $(A \text{ los } 2 \text{ s})$
 b) ¿Cuál es la posición del móvil en ese instante? $(4 \vec{i} \text{ m})$

32. En una etapa contrarreloj, un ciclista circula a 30 km/h. A 1 km por delante de él marcha otro ciclista a 20 km/h.

- a) Calcular el tiempo que tardan en encontrarse y su posición en ese instante. $(361 \text{ s}, 3007 \vec{i} \text{ m})$
 b) Resolver el problema suponiendo que los dos ciclistas circulan en sentidos opuestos. $(72 \text{ s}, 600 \vec{i} \text{ m})$

33. Un guepardo ve a una gacela a 150 m de distancia, y emprende una rápida carrera para cazarla. En ese mismo instante la gacela se da cuenta y huye hacia unos matorrales, situados a 280 m de la gacela, que pueden servirle de refugio. Suponiendo ambos movimientos como uniformes (velocidad del guepardo: 108 km/h, velocidad de la gacela: 72 km/h) ¿Quién sale ganando en esta lucha por la supervivencia? (La gacela)

34. Un arquero que está al pie de una torre de 40 m, dispara una flecha verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 25 m s^{-1} . En el instante del disparo dejan caer desde la torre una piedra en caída libre:

- a) Escribir las ecuaciones de ambos movimientos. $(\vec{r}_1 = (25t - 5t^2) \vec{j} \text{ m}, \vec{r}_2 = (40 - 5t^2) \vec{j} \text{ m})$
 b) Calcular la altura a la que se cruzan la piedra y la flecha. $(27,2 \text{ m})$
 c) Calcular la velocidad que lleva cada una en el momento del cruce. $(\vec{v}_1 = 9 \vec{j} \text{ m/s}, \vec{v}_2 = -16 \vec{j} \text{ m/s})$
 d) Calcular el tiempo que tarda la flecha en volver de nuevo al suelo. (5 s)

Movimientos en dos dimensiones:

35. Una barca cruza un río de 1000 m de ancho navegando siempre perpendicular a la orilla. Si la velocidad media que imprime el motor a la barca es de 25 km/h y el río fluye a 1,5 m/s.

- a) ¿Qué distancia a lo largo del río habrá recorrido la barca cuando llegue al otro lado? $(216,14 \text{ m})$
 b) ¿Con qué orientación debería navegar para llegar a la otra orilla justo enfrente de donde salió?
 $(\text{Con una } \vec{v} = -1,5 \vec{i} + 6,94 \vec{j} \text{ m/s})$

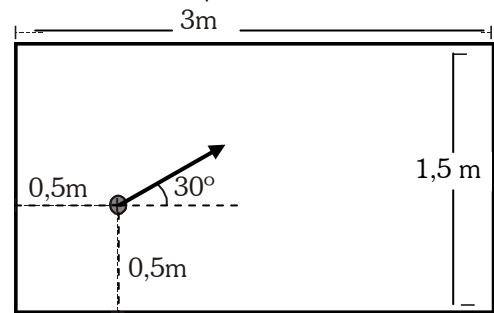
36. Jugando al billar, golpeamos la bola, que se encuentra inicialmente en el punto que indica la figura, imprimiéndole una velocidad de 1 m/s en la dirección dibujada. Despreciamos el rozamiento.

a) Calcule razonadamente la ecuación de movimiento de la bola.

$$(\vec{r} = (0,5 + 0,87t)\vec{i} + (0,5 + 0,5t)\vec{j} \text{ m})$$

b) Calcule en qué punto de la banda rebota la bola.

(Rebota a 2,24 m de la banda izquierda)



37. Una pelota rueda por un tejado que forma 30° con la horizontal, de forma que cuando cae por el alero lo hace con una velocidad de 5 m/s. La altura del alero desde el suelo es de 20 m. Calcular:

a) Tiempo que tarda en caer al suelo.

$$(t = 1,76 \text{ s})$$

b) Velocidad con la que llega la pelota al suelo.

$$(\vec{v} = 4,33\vec{i} - 20,1\vec{j} \text{ m/s})$$

c) Repetir el problema suponiendo la misma velocidad de salida, pero un tejado horizontal.

$$(t = 2 \text{ s}; \vec{v} = 5\vec{i} - 20\vec{j} \text{ m/s})$$

38. Un portero de fútbol saca de portería de modo que la velocidad inicial del balón forma 30° con la horizontal y su módulo es de 20 m/s. Despreciando el rozamiento con el aire, calcule:

a) ¿A qué distancia del punto de lanzamiento tocará el balón el césped?

$$(x = 34,64 \text{ m})$$

b) Altura máxima que alcanza el balón y tiempo que tarda en alcanzar esa altura máxima.

$$(5 \text{ m}, 1 \text{ s})$$

c) Repetir los dos apartados anteriores suponiendo que el balón sale con un ángulo de 45° con el suelo.

$$(40 \text{ m}, 10 \text{ m}, 1,4 \text{ s})$$

39. Un mortero dispara proyectiles con un ángulo de 60° con la horizontal.

a) ¿Con qué velocidad debe lanzar el proyectil para hacer impacto en una trinchera situada a 200 m? ($v_0 = 48 \text{ m/s}$)

b) Si a los 190 m del punto de disparo existe una casa de 20 m de altura, ¿conseguirá proteger ese obstáculo la trinchera?

(Sí, choca a 15,6 m de altura)

40.- Desde la terraza de un edificio de 50 m de altura se lanza horizontalmente una piedra con una velocidad de 5 m/s. Calcula:

a) ¿Qué anchura deberá tener la calle para que esa piedra no choque contra el edificio situado enfrente? ($> 15,81 \text{ m}$)

b) ¿Cuánto tiempo tardará en caer la piedra? ($3,16 \text{ s}$)

41.- Un avión vuela horizontalmente con una velocidad de 360 km/h a una altura de 500 m. Al pasar por la vertical de un punto A suelta una bomba. Calcula:

a) ¿Cuánto tiempo tardará en llegar la bomba al suelo? (10 s)

b) ¿A qué distancia del punto A se producirá la explosión? (1000 m)

c) ¿Con qué velocidad llegará la bomba al suelo? ($\vec{v} = 100\vec{i} - 100\vec{j} \text{ m s}^{-1}$)

42.- Jesús Navas lanza hacia Kanouté (que se encuentra 30 m por delante) un balón en profundidad formando un ángulo de 37° con la horizontal y a una velocidad inicial de 24 m/s. Kanouté arranca a correr con movimiento uniforme en el mismo instante del lanzamiento. ¿Qué velocidad debe llevar para alcanzar al balón en el momento en que éste toque el suelo? ($8,8 \text{ m/s}$)

43.- Un bombardero está haciendo una pasada sobre un destructor a una altura de 300 m. La velocidad del avión es 480 km/h. ¿De cuánto tiempo dispone el destructor para cambiar su rumbo una vez que han sido soltadas las bombas? ($7,75 \text{ s}$)

44.- Un saltador de longitud salta 8 m cuando lo hace con un ángulo de 30° con la horizontal. ¿Cuánto saltaría, en las mismas condiciones, si lo hiciera con un ángulo de 45°? ($9,05 \text{ m}$, salta con una rapidez de $9,6 \text{ m/s}$)

45.- Un jugador de baloncesto desea conseguir una canasta de 3 puntos. La canasta está situada a 3,05 m de altura y la línea de tres puntos a 6,25 m de la canasta. Si el jugador lanza desde una altura de 2,20 m sobre el suelo y con un ángulo de 60°, calcula la velocidad inicial del balón para conseguir canasta. ($v_0 = 8,85 \text{ m/s}$;

$$\vec{v}_0 = 4,42\vec{i} + 7,66\vec{j} \text{ m/s})$$

46. Un avión de salvamento que vuela a una altura de 100 m y a una velocidad de 100 m/s tiene que lanzar un paquete de provisiones a unos naufragos que se encuentran en una balsa. Calcular:

- a) desde qué distancia horizontal hasta la balsa tienen que soltar el paquete para que éste caiga al mar 10 m antes de la balsa. (*Desde 457,2 m*)
- b) Velocidad con que el paquete llega al mar. ($\vec{v} = 100 \vec{i} - 44,7 \vec{j} \text{ m/s}$)

47. Un bombardero que vuela a 150 m de altura y a una velocidad de 300 km/h tiene que destruir un tanque que avanza a 36 km/h. Para ello tiene que soltar una bomba desde cierta distancia antes de encontrarse a su altura. Calcular la distancia horizontal hasta el tanque desde la que tiene que soltar la bomba el avión. (*Desde 402 m aprox.*)

Movimientos circulares:

48. Una rueda de 0,5 m de radio gira a 20 rad/s. Calcular:

- a) Periodo, frecuencia del movimiento (*0,315 s , 3,18 Hz*)
- b) Ecuación del movimiento ($\theta = 20 t \text{ rad}$)
- c) Tiempo que tarda en dar 100 vueltas completas (*31,4 s.*)
- d) Ángulo recorrido en 5 minutos. (*6000 rad*)
- e) Velocidad de un punto: 1) del exterior, 2) a 25 cm del centro. (*10 m/s , 5 m/s*)

49. Un coche toma una curva con forma de circunferencia de 50 m de radio de curvatura con una rapidez constante de 72 km/h. Calcular:

- a) Aceleración tangencial y normal de este movimiento. (*0 , 8 m/s²*)
- b) Velocidad angular y ecuación de movimiento. (*0,4 rad/s , $\theta = 0,4 t \text{ rad}$*)
- c) Periodo y frecuencia, si el movimiento describiera una circunferencia completa. (*15,7 s , 0,064 Hz*)

50. El periodo del M.C.U. de un disco es de 5 s. Calcular:

- a) Frecuencia, velocidad angular (*0,2 Hz , 1,257 rad/s*)
- b) Ecuación de movimiento. ($\theta = 1,257 t \text{ rad}$)
- c) Velocidad de un punto del disco a 10 cm del centro. (*0,13 m/s*)
- d) Aceleración lineal (tangencial) de dicho punto. (*0,158 m/s²*)
- e) Ángulo y distancia recorrida por el punto anterior en 1 minuto. (*75,42 rad , 7,542 m*)

51. Los discos que se usan en los tocadiscos (los LP) giran a un ritmo de 33 rpm (revoluciones por minuto). Calcular:

- a) Velocidad angular, frecuencia y periodo. (*3,46 rad/s , 0,55 Hz , 1,82 s.*)
- b) Ecuación de movimiento. ($\theta = 3,46 t \text{ rad}$)
- c) Tiempo que tardará el disco en girar 100 rad. (*28,9 s*)
- d) Velocidad y aceleración de un punto situado: 1) a 15 cm del centro (*0,52 m/s , 1,8 m/s²*)
2) en el centro. (*0 m/s , 0 m/s²*)

52. Una sierra eléctrica gira con una velocidad de 1000 rpm. Al desconectarla, se acaba parando en 5 s. Calcular:

- a) La aceleración angular de frenado. (*- 20,94 rad/s²*)
- b) La aceleración lineal de los dientes de la hoja si ésta tiene un diámetro de 30 cm. (*- 3,14 m/s²*)

53. Un motor es capaz de imprimir una velocidad angular de 3000 rpm a un volante en 10 s cuando parte del reposo. Calcular:

- a) La aceleración angular del proceso. (*31,42 rad/s²*)
- b) ¿Cuántos radianes gira el volante en el tiempo anterior? (*1571 rad, aprox. 250 vueltas*)

54. Un volante gira a 3000 rpm y mediante la acción de un freno se logra detenerlo después de dar 50 vueltas. Calcular:

- a) ¿Qué tiempo empleó en el frenado? (*2 s*)
- b) ¿Cuánto vale su aceleración angular? (*- 157,1 rad/s²*)

55. La velocidad angular de un motor aumenta uniformemente desde 300 rpm hasta 900 rpm mientras el motor efectúa 50 revoluciones. Calcular:

- a) ¿Qué aceleración angular posee? (*12,6 rad/s²*)
- b) ¿Cuánto tiempo se empleó en el proceso? (*5 s*)