

# CINEMÁTICA

## 1.- INTRODUCCIÓN

**MECÁNICA:** parte de la física, que estudia el movimiento de los cuerpos.

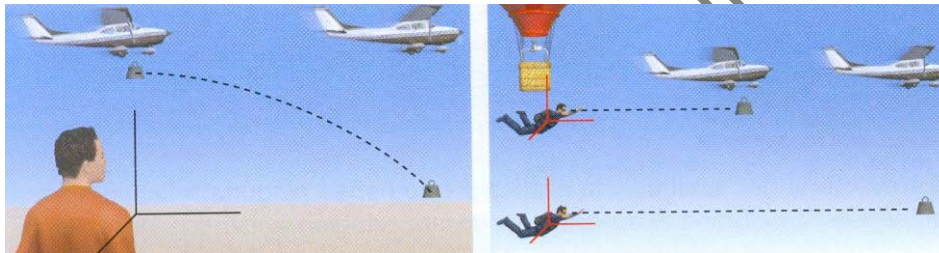
**CINEMÁTICA:** parte de la mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos, independientemente de la causa que lo provoca.

**ESTÁTICA:** del equilibrio de los cuerpos.

**DINÁMICA:** parte de la mecánica que estudia las fuerzas como agentes causantes de los cambios de movimiento, así como la energía mecánica intercambiada.

**RELATIVIDAD DEL MOVIMIENTO:** Un cuerpo está en movimiento cuando cambia su posición respecto de otro que se toma como referencia. En caso contrario, se encuentra en reposo. Es necesario por lo tanto un sistema de referencia para saber si se mueve o no.

**SISTEMA DE REFERENCIA:** todo movimiento es relativo, ya que el que un cuerpo esté o no en movimiento depende del observador, es decir, del punto que se tome como referencia para su estudio. Un mismo movimiento cambia con el observador:



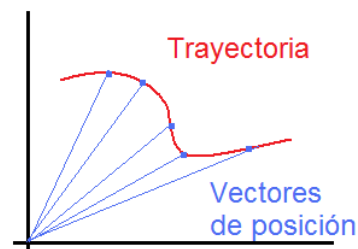
- El observador que mira el paracaídas desde tierra, justo en su vertical, ve cómo cae un objeto que describe una trayectoria parabólica.
- El que lleva el paracaídas ve caer, alejándose cada vez más rápidamente, el objeto siguiendo una trayectoria rectilínea.

**MOVIMIENTO ABSOLUTO:** El movimiento absoluto sería aquel en el que se tomase un origen en reposo como referencia. Pero no es posible determinar ningún punto del universo que esté en reposo absoluto. Además, este hipotético punto estaría en movimiento en relación con todos los puntos que varían su posición respecto de él.

**MÓVIL:** Es el objeto que se está moviendo.

**TRAYECTORIA:** Es el camino que sigue.  
El cuerpo al moverse describe una trayectoria:

**ORIGEN:** Es el punto que nos sirve de referencia para saber dónde está el móvil. Este punto pertenece a la trayectoria.



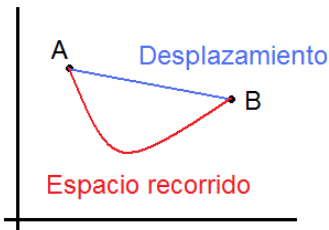
Se puede determinar un movimiento conociendo el vector de posición. Dicho vector tiene su inicio en el origen de coordenadas, y su extremo, en la posición del móvil en cada momento. Por ejemplo, el vector de posición  $(2e, 3t)$  indica que en  $t = 1$  s, el móvil se encuentra en el punto  $(2, 3)$ .

**POSICIÓN (S).** Es el lugar donde está el móvil, determinado por la distancia al origen medida sobre la trayectoria.

**TIEMPO (t):** Es el instante en el que el móvil está en una posición S. Por comodidad, se suele asignar un valor cero al empezar a medir el movimiento (aunque pueden darse casos en que el objeto no parta de una posición cero).

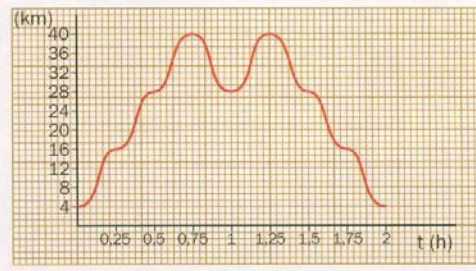
**DESPLAZAMIENTO ( $\Delta S$ ):** ( $\Delta S = S_f - S_i = S_f - S_0$ ): Es la cantidad que ha cambiado la posición del móvil entre dos instantes del viaje: la posición final menos la inicial.

**ESPACIO RECORRIDO (e).** Es la distancia que ha recorrido el móvil. Si no cambia el sentido del movimiento, coincide con el desplazamiento (movimientos rectilíneos).



El desplazamiento (de A a B) sería la línea recta que une el punto A con el punto B.  
El espacio recorrido (entre A y B) sería la trayectoria completa comprendida entre ambos puntos.

**RELACIÓN S-t.** Es la relación que indica para cada instante (t) la posición en que se encuentra el móvil (S): en este caso, la gráfica que relaciona la posición con el tiempo. Por ejemplo, un autobús interurbano realiza su trayecto diario. Sale a su hora de la estación de autobuses y recorre varios pueblos. La trayectoria del autobús y la gráfica S-t no tienen ninguna relación. La trayectoria es un camino, y su gráfica S-t, una relación entre dos variables.



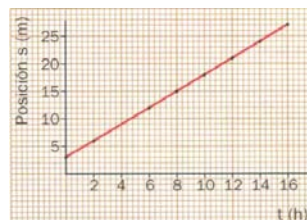
**ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO.** La relación S-t que describe el movimiento de un móvil se puede expresar de forma gráfica, pero también mediante un texto o con una ecuación.

Por ejemplo, una persona sube a un ascensor que le lleva al piso 12 de forma que cada dos segundos sube tres metros. Elige la planta baja como origen y empieza a contar el tiempo cuando pasa por el primer piso, que está en  $S = 3$  m. Con esta información se conoce perfectamente el movimiento que realiza; en este caso, la relación posición-tiempo se ha expresado con un texto.

Al ordenar los datos posición-tiempo (S-t) resulta:

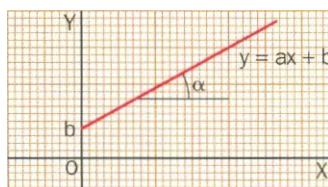
Posición (m)	3	6	12	15	18	21	24	27
Tiempo (s)	0	2	6	8	10	12	14	16

y si se representan gráficamente con la posición en ordenadas y el tiempo en abscisas, se obtiene una gráfica de ecuación:  $S = 3 + 1,5 t$



ya que al empezar a medir las magnitudes, el ascensor estaba a tres metros del origen,  $S = 3$  m, y la pendiente, lo que aumenta la posición  $S = 3$  cada segundo, es  $3/2 = 1,5$  m/s. La relación que liga la posición con el tiempo también se puede dar con una ecuación. A esta ecuación se la llama **ecuación del movimiento**. Para describir un movimiento es suficiente con indicar la trayectoria y la relación entre la posición y el tiempo (S-t). Esta relación puede ser una gráfica, la ecuación del movimiento o un texto descriptivo.

Recordemos: La ecuación general de la recta es  $y = b + ax$



donde las constantes a y b representan respectivamente la pendiente de la recta y la ordenada en el origen.

## MAGNITUDES ESCALARES Y VECTORIALES.

Hay magnitudes como la masa o la temperatura que quedan totalmente determinadas mediante un valor numérico con su unidad. A estas magnitudes se las llama **magnitudes escalares**. Las magnitudes escalares están determinadas por un número y su unidad. Por ejemplo:

- Al pedir 2 kg de naranjas, el frutero tiene toda la información que necesita.
- El termómetro indica con un número la temperatura de la habitación.

Sin embargo, otras magnitudes como la fuerza o la velocidad requieren más información para comprender su significado. Por ejemplo:

- Sólo sabemos que el coche va a salir de la rotonda a 40 km/h, pero no qué carretera tomará. Tenemos una información incompleta de su velocidad.
- Aunque el portero sepa que el futbolista golpea el balón con una fuerza de 200 N, no sabe en qué dirección lo va a lanzar y no tiene claro cómo situarse.

Los vectores son elementos matemáticos especialmente útiles para completar la información de magnitudes como la velocidad o la fuerza, denominadas **magnitudes vectoriales**. Las magnitudes vectoriales se determinan con un vector.

Un **vector** es un segmento orientado con las siguientes características:

- Dirección. Es la de la recta en la que está situado el segmento y todas sus paralelas.
- Sentido. Es el que señala la flecha. Cada dirección tiene dos sentidos.
- Módulo. Es el valor numérico de la magnitud que representa y se indica mediante la longitud del vector.
- Punto de aplicación. Es el punto donde se sitúa el vector.

## 2.- VELOCIDAD

En las maratones, los corredores con mejores marcas tienen el privilegio de situarse en cabeza del pelotón de salida, evitando así los empujones. Podemos saber cuáles son los más rápidos por los tiempos que han realizado en otras maratones anteriores (42,2 km). Pero para comparar su rapidez, por ejemplo, con la de una liebre o un gamo, hay que eliminar la limitación de considerar un espacio fijo. Para ello definimos una nueva magnitud a la que llamamos velocidad.

**VELOCIDAD** de un móvil es la distancia que recorre en la unidad de tiempo.

Unidades: Su unidad en el SI es el metro por segundo (m/s).

En los medios de transporte es más habitual el kilómetro por hora (Km/h). La equivalencia entre estas dos unidades es la siguiente:

$$1 \frac{Km}{h} = \frac{1000m}{3600s} = \frac{1}{3,6} \left(\frac{m}{s}\right)$$

Por ejemplo:

$$72 \frac{Km}{h} = \frac{72000m}{3600s} = 20 \left(\frac{m}{s}\right)$$

Los cambios de unidades son muy fáciles de hacer mediante factores de conversión:

$$108 \frac{Km}{h} \cdot \frac{1000m}{1Km} \cdot \frac{1h}{3600s} = 30 \left(\frac{m}{s}\right)$$

### VELOCIDAD MEDIA

La velocidad media ( $V_m$ ) de un móvil se calcula dividiendo el espacio recorrido entre el tiempo empleado en recorrerlo.  $V = e / t$

Mejor aún, podemos definirla como:

$$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_f - S_o}{t_f - t_o}$$

donde  $S_f$ ,  $S_o$ ,  $t_f$ ,  $t_o$  están medidos respecto al mismo sistema de referencia.

### VELOCIDAD INSTANTÁNEA

La velocidad instantánea ( $V_i$ ) o simplemente velocidad ( $V$ ), es la que lleva el móvil en cada momento.

Si el corredor de élite durante toda la carrera llevase una velocidad de 19,7 km/h, también haría una media de 19,7 km/h. En ese caso, sus velocidades media e instantánea coincidirían en todo momento.

Matemáticamente, podríamos definirla:

$$V_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (V_m) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Es decir, la velocidad instantánea es la velocidad media medida en un tiempo muy pequeño.

### LA VELOCIDAD ES UN VECTOR.

Hasta ahora se ha llamado velocidad al espacio que recorre un móvil en la unidad de tiempo, pues es esa la manera habitual de hablar: se dice que un coche va con una velocidad de 90 km/h y no que va con una rapidez de 90 km/h.

Sin embargo, ahora sabemos que ese valor aporta una parte de la información sobre la velocidad, su módulo, pero no toda la información.

La velocidad se representa por un vector tangente a la trayectoria en el sentido del movimiento, con su punto de aplicación en el móvil. Su módulo es el espacio recorrido en la unidad de tiempo.

## 3.- CLASIFICACIÓN DE LOS MOVIMIENTOS

Los movimientos quedan determinados por la trayectoria y las relaciones S-t; por tanto, se pueden clasificar de acuerdo a dos criterios:

Según sea la trayectoria, una recta o una curva, al movimiento lo llamamos rectilíneo o curvilíneo.

- En el movimiento rectilíneo, el vector velocidad tendrá siempre la misma dirección, la de la recta.
- En el curvilíneo, el vector velocidad cambiará de dirección a lo largo de la trayectoria para poder ser siempre tangente a ella.

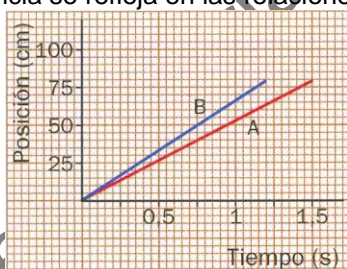
De acuerdo con la gráfica S-t, el movimiento puede ser uniforme o variado.

- Si la gráfica es una recta, será uniforme (el móvil recorre el mismo espacio en intervalos de tiempo iguales).
- Si la gráfica es una curva, será variado (el móvil recorre espacios diferentes en intervalos de tiempo iguales).

### MOVIMIENTOS UNIFORME Y VARIADO

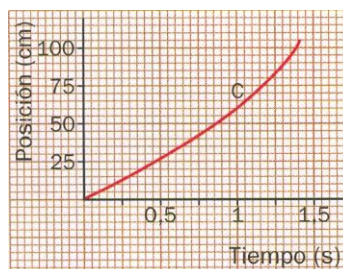
- Un movimiento es **uniforme** cuando el móvil recorre el mismo espacio en intervalos de tiempo iguales.
- Un movimiento es **variado** cuando el móvil recorre espacios diferentes en intervalos de tiempo iguales.

Esta diferencia se refleja en las relaciones posición-tiempo.



Cuando las gráficas son rectas, la pendiente es constante, por lo que no cambia la velocidad. Recorre espacios iguales en tiempos iguales y, por tanto, el movimiento es **uniforme**.

Cuanto mayor pendiente tiene la gráfica S-t, mayor es la velocidad del movimiento.



La pendiente de la gráfica S-t va cambiando, luego cambia la velocidad del movimiento. El móvil recorre en el mismo tiempo espacios diferentes y, por tanto, el movimiento es **variado**.

La gráfica S-t es una curva.

La pendiente de la gráfica S-t representa la velocidad con que se desplaza el móvil. Si la gráfica S-t es una recta, el movimiento es uniforme, y si es una curva, el movimiento es variado.

### VELOCIDADES DIFERENTES CON IGUAL RELACIÓN S-t

Un movimiento uniforme es el que en tiempos iguales recorre espacios iguales. También se definió como el que lleva siempre la misma velocidad. Ahora se puede matizar esta afirmación.

## El movimiento uniforme mantiene constante el módulo de la velocidad.

Por ejemplo, un ciclista circula por una carretera de montaña con el velocímetro indicando constantemente 32 Km/h. A continuación, el mismo ciclista, que sigue a la misma velocidad, va por otra carretera recta. En los dos casos, el módulo de su velocidad es el mismo, y también lo es su relación S-t; sin embargo, el vector velocidad ha cambiado.

Por tanto, la velocidad del ciclista en la carretera de montaña es diferente que en el tramo recto.

La velocidad de dos móviles es la misma si sus vectores V son iguales: deben tener el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

## 4.- MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME (MRU)

La trayectoria de los movimientos rectilíneos es una línea recta; por tanto, la dirección del vector velocidad, que es tangente a la trayectoria, es siempre la misma. **Que el movimiento sea uniforme informa que el módulo de la velocidad no cambia.**

En un movimiento rectilíneo y uniforme, el vector velocidad no cambia de módulo ni de dirección; es constante.

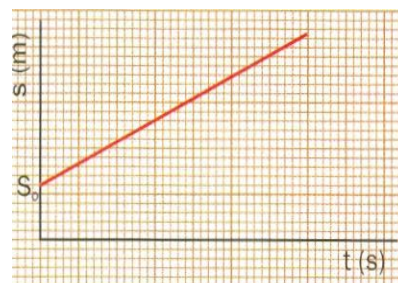
### RELACIÓN S-t EN UN MOVIMIENTO UNIFORME

La gráfica S-t del movimiento uniforme es una recta y su pendiente, el módulo de la velocidad, es constante.

El vector velocidad, tangente a la trayectoria, solo mantiene igual su dirección en las trayectorias rectas.

Cuando  $t = 0$  s, el valor de la posición es  $S = S_0$ . La pendiente de la gráfica es el módulo de la velocidad; por tanto, la ecuación del movimiento uniforme toma la siguiente forma:

$$S = S_0 + Vt$$



En general, se utilizan como los signos de los ejes de coordenadas: positivos hacia la derecha o hacia arriba, y negativos al contrario. Por ejemplo, si la ecuación del movimiento de un móvil es  $S = 3 - 5t$ , expresada en el SI, al empezar a contar, el móvil está a 3 m a la derecha del origen, y se está moviendo hacia la izquierda a 5 m/s.

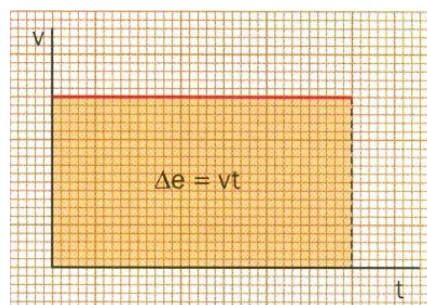
### GRÁFICA DEL MÓDULO DE LA VELOCIDAD FRENTE AL TIEMPO (V-t) EN EL MRU

El módulo de la velocidad no cambia con el tiempo. Si la velocidad es positiva, su representación quedará en la parte positiva de los valores del módulo de la velocidad, y se situará por debajo cuando la velocidad tenga el sentido contrario.

En todo tipo de movimientos, el área encerrada entre la gráfica v-t y el eje de los tiempos es el desplazamiento.

En el movimiento uniforme, el área bajo la gráfica V-t es el producto  $V \cdot t$ . De la ecuación  $S = S_0 + V \cdot t$  se deduce que  $V \cdot t = S - S_0$  que es el desplazamiento.

Además, el desplazamiento coincide con el espacio recorrido (e), ya que la velocidad no puede cambiar su módulo y, por tanto, el móvil no puede pararse y dar la vuelta desandando el camino.



## 5.- ACCELERACIÓN

### CAMBIOS EN LA VELOCIDAD

Un cuerpo posee un movimiento acelerado cuando varía su velocidad.

Las posibles formas de reconocer, a partir de la descripción de un movimiento, que la velocidad está cambiando son las siguientes:

- Observar la descripción de su movimiento, su trayectoria y su relación posición-tiempo (S-t).
- Observar la gráfica velocidad-tiempo (V-t), que representa el módulo de la velocidad frente al tiempo. Si el módulo de V cambia, el movimiento es acelerado.

La velocidad puede cambiar porque:

- **Cambia su módulo.** Se refleja en que su gráfica s-t es curva y, por tanto, su ecuación no es de primer grado. También, en que la gráfica v-t tiene pendiente o, lo que es igual, que su valor cambia con el tiempo.
- **Cambia su dirección.** Cuando el móvil lleva una trayectoria curva, la velocidad, tangente a la trayectoria, cambia de dirección.

## LA ACELERACIÓN

Una vez que se sabe que un movimiento es acelerado, se necesita una magnitud que indique cómo de acelerado está; una magnitud que permita comparar las aceleraciones de diferentes movimientos.

La aceleración es la variación de la velocidad en la unidad de tiempo.  
Su unidad en el SI es el  $m/s^2$ .

La aceleración se va a calcular en estos casos particulares

- Cuando la trayectoria es rectilínea y la velocidad solo cambia de módulo.
- Cuando la trayectoria es circular y el movimiento uniforme, y, por tanto, la velocidad solo cambia de dirección.

### ACELERACIÓN EN MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS

La **aceleración media**,  $a_m$ , es el cociente de la variación total de la velocidad entre el tiempo que emplea en variarla:  $a = \Delta V / \Delta t$

Mejor aún, podemos definirla como: 
$$a_m = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_f - V_o}{t_f - t_o}$$

donde  $V_f$ ,  $V_o$ ,  $t_f$ ,  $t_o$  están medidos respecto al mismo sistema de referencia.

La **aceleración instantánea** ( $a_i$ ) o simplemente aceleración ( $a$ ), es el cambio de velocidad por unidad de tiempo en cada instante.

Matemáticamente, podríamos definirla:

$$a_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (a_m) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Es decir, la aceleración instantánea es la aceleración media medida en un tiempo muy pequeño.

En los movimientos rectilíneos la aceleración se representa por un vector tangente a la trayectoria, en el sentido de la velocidad si aumenta su valor y en el contrario si disminuye.

Cuando la velocidad cambia de forma uniforme, la aceleración media y la instantánea coinciden.

### ACELERACIÓN EN MOVIMIENTOS CIRCULARES UNIFORMES

Los movimientos circulares, aunque sean uniformes, son acelerados porque cambia la dirección de la velocidad.

La **aceleración normal**,  $a_N$ , mide la variación de la dirección de la velocidad por unidad de tiempo.

Se representa con un vector perpendicular a la trayectoria dirigido hacia el centro. Si la trayectoria es una circunferencia de radio R, su módulo es:

$$a_N = \frac{V^2}{R}$$

#### Aceleración normal y aceleración tangencial:

Una variación en la velocidad supone una variación en la aceleración. Pero al ser la aceleración una magnitud vectorial, la variación puede ser un cambio numérico o simplemente un cambio de dirección.

- Los cambios en el valor numérico de la velocidad dan lugar a la aceleración tangencial ( $a_t$ ).
- Los cambios de dirección de la velocidad dan lugar a la aceleración normal ( $a_N$ ).

Según esto:

- Todo movimiento que no suponga un cambio de dirección tendrá sólo  $a_t$ .
- Los movimientos circulares presentan generalmente las dos aceleraciones.
- Un movimiento circular en el que no varíe el valor numérico de la velocidad tendrá sólo  $a_N$ .

ES IMPORTANTE SABER → Si el móvil cambia su velocidad en módulo y en dirección, la aceleración total es la suma de dos vectores: el que mide lo que varía su módulo, que es tangente a la trayectoria ( $a_t$ ), y el que mide lo que varía su dirección, que es perpendicular ( $a_N$ ).

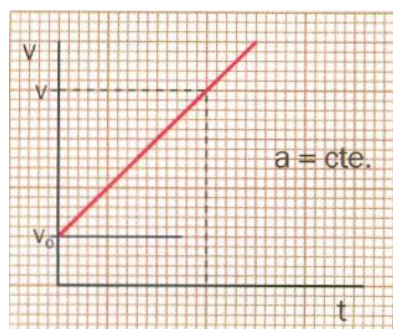
## 6.- MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO (MRUA)

Un movimiento es rectilíneo uniformemente acelerado cuando su trayectoria es recta y el módulo de la velocidad cambia de forma constante.

### RELACIÓN VELOCIDAD -TIEMPO EN UN MRUA

Para que el módulo de la velocidad varíe la misma cantidad,  $\Delta V$ , cada segundo es preciso que su relación con el tiempo se represente mediante una recta, ya que así su pendiente (la aceleración) sería constante.

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_f - V_o}{t_f - t_o} = \text{constante}$$



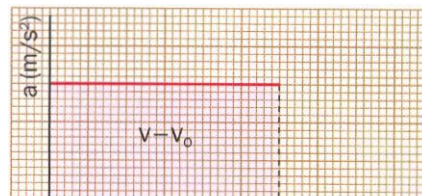
Si el movimiento es, además, rectilíneo, esta es la única aceleración que existe. Despejando la velocidad:

$$V_f = V_o + a(t_f - t_o)$$

La gráfica  $V = V_o + a(t_f - t_o)$  permite calcular el desplazamiento  $S - S_o$ , y si se conoce la posición inicial, también la ecuación del movimiento.

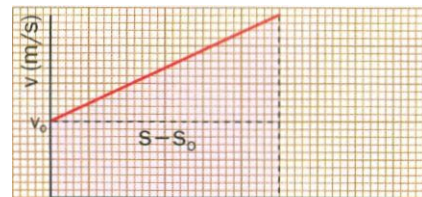
Área bajo la gráfica a-t. Su valor es la variación de la velocidad:

$$A = a t = V - V_o$$



Área bajo la gráfica V-t. Su valor es la suma de un triángulo y un rectángulo y coincide con el desplazamiento,  $S - S_o$ :

$$S - S_o = V_o t + \frac{(V - V_o)t}{2} = V_o t + \frac{1}{2} a t^2$$



Considerando que el tiempo inicial no siempre es cero, la expresión completa sería:

$$S = S_o + V_o(t_f - t_o) + \frac{1}{2} a(t_f - t_o)^2$$

Esta misma expresión, obtenida anteriormente de modo gráfico, se puede obtener de otra forma:

$$V_m = \frac{V_f - V_o}{2} = \frac{V_o + a(t_f - t_o) + V_o}{2} = \frac{2V_o + a(t_f - t_o)}{2} = V_o + \frac{1}{2} a(t_f - t_o)$$

Multiplicando todo por  $(t_f - t_o)$ :

$$V_m(t_f - t_o) = V_o(t_f - t_o) + \frac{1}{2} a(t_f - t_o)(t_f - t_o) \Rightarrow S_f - S_o = V_o(t_f - t_o) + \frac{1}{2} a(t_f - t_o)^2 \Rightarrow$$

$$S_f = S_o + V_o(t_f - t_o) + \frac{1}{2} a(t_f - t_o)^2$$

Hay una tercera expresión que se puede emplear. Eliminando la variable tiempo entre la ecuación de la velocidad y la ecuación de la posición se obtiene una ecuación que relaciona directamente la posición con la velocidad y facilita algunos cálculos.

Despejamos el tiempo de la primera expresión:

$$V_f = V_o + a(t_f - t_o) \Rightarrow (t_f - t_o) = \frac{(V_f - V_o)}{a}$$

Y lo sustituimos en la segunda:

$$S_f - S_o = V_o(t_f - t_o) + \frac{1}{2}a(t_f - t_o)^2 \Rightarrow S_f - S_o = V_o\left(\frac{V_f - V_o}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(\frac{V_f - V_o}{a}\right)^2 \Rightarrow$$

$$S_f - S_o = \frac{V_o V_f - V_o^2}{a} + \frac{1}{2}a \frac{V_f^2 + V_o^2 - 2V_f V_o}{a^2} \Rightarrow S_f - S_o = \frac{V_o V_f - V_o^2}{a} + \frac{V_f^2 + V_o^2 - 2V_f V_o}{2a} \Rightarrow$$

$$S_f - S_o = \frac{2V_o V_f - 2V_o^2 + V_f^2 + V_o^2 - 2V_f V_o}{2a} = \frac{V_f^2 - V_o^2}{2a} \Rightarrow (S_f - S_o)2a = V_f^2 - V_o^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{V_f^2 = V_o^2 + 2a(S_f - S_o)}$$

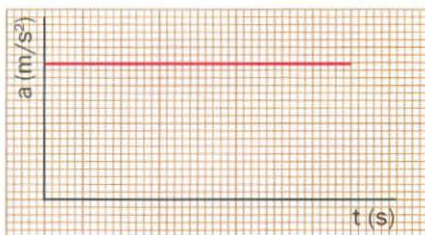
### DESCRIPCIÓN DEL MRUA

Se realiza mediante la trayectoria (una recta) y la relación posición-tiempo. Si  $S_o$  es la posición del móvil al empezar a contar el tiempo ( $t_o = 0$ ), la ecuación del movimiento es la siguiente:

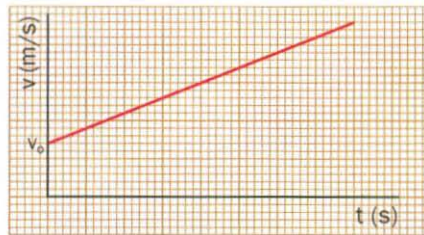
$$\boxed{S_f = S_o + V_o t + \frac{1}{2} a t^2}$$

Esta ecuación, junto con las ecuaciones que indican la constancia de la aceleración y el valor de la velocidad en cada momento, describe el movimiento.

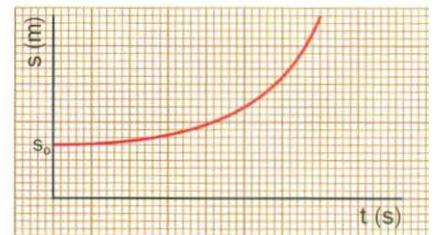
### GRÁFICAS DEL MRUA



$$a = \text{cte}$$



$$v = v_o + at$$



$$s = s_o + v_o t + \frac{1}{2} a t^2$$

### RELACIÓN ENTRE EL DESPLAZAMIENTO Y EL ESPACIO RECORRIDO

En un mrua, el desplazamiento  $\Delta S = S - S_o$  y el espacio recorrido, e, pueden coincidir o no:

- Cuando los signos de la velocidad inicial y de la aceleración (que son los de los coeficientes de t y de  $t^2$ , respectivamente) son iguales, el móvil es acelerado en el sentido de la velocidad inicial y no retrocede por el mismo camino: el desplazamiento coincide con el espacio recorrido.
- Cuando los signos de la velocidad inicial y de la aceleración son diferentes, el móvil primero frena hasta pararse y después retrocede por el mismo camino: el desplazamiento no coincide con el espacio recorrido.

Cuando la velocidad inicial y la aceleración tienen distinto signo, el espacio recorrido no coincide con el desplazamiento. Sí lo hace cuando tienen el mismo signo.

## 7.- ALGUNOS MRUA TÍPICOS: CAÍDA LIBRE Y TIRO VERTICAL

Los cuerpos que se encuentran dentro del campo gravitatorio terrestre están sometidos a la fuerza de la gravedad. Esta fuerza es casi constante, vertical y dirigida hacia el centro de la tierra. En consecuencia, todos los cuerpos sometidos a su acción, están sometidos a un MRUA.

El valor que se establece para esta aceleración de la gravedad es de  $9,8 \text{ m/s}^2$  para puntos de la superficie terrestre a  $45^\circ$  de latitud y a nivel del mar.

Su valor variará ligeramente con la latitud y la altura del punto (varía desde  $9,73$  en el ecuador, a  $9,83$  en los polos). De todos modos se tomará en todos los problemas  $9,8$  porque la variación es muy pequeña.

Dos ejemplos de problemas en los que es aplicable la aceleración de la gravedad son los de caída libre y tiro vertical.

## **CAÍDA LIBRE**

Si se dejan caer un papel y una canica de acero, se observa que la canica de acero llega al suelo primero. No es de extrañar que el filósofo Aristóteles, del siglo III a. C., llegase a la conclusión de que las cosas más pesadas caen más deprisa que las más ligeras; suponía que la velocidad de caída era proporcional al peso del objeto.

Sin embargo, se puede hacer una sencilla experiencia donde se comprueba que esta generalización no se ajusta a la realidad: si se arruga el papel hasta formar una bolita del tamaño de la bola de acero y de nuevo se sueltan a la vez, se comprueba que ambas llegan prácticamente a la par al suelo.

Los astronautas en la Luna, donde no hay atmósfera, dejaron caer diferentes cuerpos y vieron que todos lo hacían con igual aceleración.

En el siglo XVI, Galileo cambió la forma de interpretar el movimiento, considerándolo independiente de la naturaleza del cuerpo. También introdujo la idea de vacío como ausencia de materia, y llamó aceleración de la gravedad a la aceleración de caída de los cuerpos.

La caída libre en el vacío supuso que las diferencias en la aceleración de caída de distintos cuerpos eran debidas al efecto del aire atmosférico, que frena a unos más que a otros, dependiendo, entre otras cosas, de su forma.

Para contrastar esta idea en la Tierra necesitamos el concepto que Galileo introdujo, el concepto de vacío. En su tiempo, por falta de medios, no pudo hacerse la experiencia donde haciendo el vacío en un tubo, la pluma y la bola caen a la vez desde la misma altura.

Si los objetos cayesen en el vacío, esto es, sin que nada los frenase, todos lo harían con la misma aceleración, la aceleración de la gravedad.

Se denomina caída libre al movimiento de un cuerpo sometido a la aceleración de la gravedad. Esto solo ocurre en el vacío.

Aunque la caída libre solo se produce en el vacío, cuando las fuerzas que frenan la caída son pequeñas, como ocurre en la bola de papel o de acero siempre que no adquieran una gran velocidad, su aceleración es casi la aceleración de la gravedad.

## **TIRO VERTICAL**

Un objeto lanzado hacia arriba también se considera que está en caída libre. La caída libre solo nos indica que el objeto se mueve con la aceleración de la gravedad de forma independiente al sentido de su velocidad. En los tiros verticales habrá que considerar que las velocidades pueden ir hacia arriba o hacia abajo y que la aceleración de la gravedad siempre va hacia abajo: Por ello habrá que tener en cuenta un criterio de signos para solucionar este problema.

## **CÁLCULO DE LA ACELERACIÓN EN LA CAÍDA LIBRE Y TIRO VERTICAL**

Cuando se deja caer un cuerpo o se lanza hacia arriba o hacia abajo, o se mueve en caída libre, su aceleración es constante y su trayectoria rectilínea, por lo que el movimiento es rectilíneo uniformemente acelerado y la ecuación del movimiento es una parábola.

Las fórmulas que se emplearán serán las mismas del MRUA, poniendo en vez de  $a$ , la aceleración de la gravedad:

$$V_f = V_o + g(t_f - t_o)$$

$$S = S_o + V_o(t_f - t_o) + \frac{1}{2}g(t_f - t_o)^2$$

$$V_f^2 = V_o^2 + 2g(S_f - S_o)$$

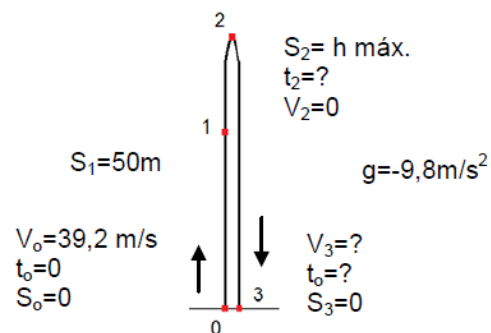
A fin de unificar criterios para todos los ejercicios, se tomará como **criterio de signos** para ambos casos (caída libre y tiro vertical) el mismo criterio de signos de los ejes de coordenadas. Es decir, positivo hacia arriba y negativo hacia abajo.

### EJERCICIO RESUELTO

Se lanza verticalmente hacia arriba una piedra con  $V_o$  39,2 m/s. Calcular

- Tiempo que tarda en llegar al punto más alto.
- Altura máxima que alcanza.
- Tiempo que tarda en alcanzar una altura de 50 m.
- Velocidad que lleva a los 50 m de altura.
- Tiempo que tarda en regresar al punto de partida.
- Velocidad que tendrá en ese momento.

Criterio de signos:  $\uparrow > 0$     $\downarrow < 0$



$$V_f = V_o + g(t_f - t_o)$$

$$S = S_o + V_o(t_f - t_o) + \frac{1}{2} g(t_f - t_o)^2$$

$$V_f^2 = V_o^2 + 2g(S_f - S_o)$$

- Tiempo que tarda en llegar al punto más alto.

$$V_f = V_o + a(t_f - t_o) \Rightarrow 0 = 39,2 - 9,8(t - 0) \Rightarrow t = \frac{39,2}{9,8} = 4s$$

Nunca puede dar un tiempo negativo. Si lo obtenemos como única solución, nos habremos equivocado (puede dar una solución negativa y otra positiva al resolver una ecuación de 2º grado  $\rightarrow$  se desprecia la negativa).

- Altura máxima que alcanza.

$$S_f = S_o + V_o(t_f - t_o) + \frac{1}{2} a(t_f - t_o)^2 \Rightarrow S_2 = h_{\text{máx}} = 0 + 39,2(4 - 0) + \frac{1}{2} (-9,8)(4 - 0)^2 = 78,4m$$

La altura positiva significa que está por encima del cero.

- Tiempo que tarda en alcanzar una altura de 50 m.

$$S_1 = S_o + V_o(t_1 - t_o) + \frac{1}{2} a(t_1 - t_o)^2 \Rightarrow 50 = 0 + 39,2(t_1 - 0) + \frac{1}{2} (-9,8)(t_1 - 0)^2 \Rightarrow 4,9t_1^2 - 39,2t_1 + 50 = 0$$

Da dos soluciones: 1,6 y 6,4 s. Las dos son válidas:

- 1,6 s es el tiempo que emplea en llegar al punto 1 subiendo (sólo subida).
- 6,4 es el tiempo que tarda en llegar al punto 1 después de subir y estar bajando (serían los 4 s que le lleva subir más los 2,4 s que emplearía en volver a pasar por el punto 1).

Si entendemos que la pregunta es mientras sube, la respuesta sería 1,6 s.

- Velocidad que lleva a los 50 m de altura.

$$V_f = V_o + a(t_f - t_o) \Rightarrow V_1 = 39,2 - 9,8(1,6 - 0) \Rightarrow V_f = 23,52m/s \rightarrow (\text{sube})$$

$$V_f = V_o + a(t_f - t_o) \Rightarrow V_1 = 39,2 - 9,8(6,4 - 0) \Rightarrow V_f = -23,52m/s \rightarrow (\text{baja})$$

(las dos soluciones son válidas)

- Tiempo que tarda en regresar al punto de partida.

Tarda en subir 4 s. Tardará en bajar otros 4 s. Tiempo total: 8 s.

- Velocidad que tendrá en ese momento.

Si consideramos subida y bajada: ( $V_o=39,2$  m/s;  $t_o=0$  s):

$$V_f = V_o + a(t_f - t_o) \Rightarrow V_3 = 39,2 - 9,8(8 - 0) \Rightarrow V_3 = -39,2m/s \rightarrow (\text{baja})$$

Si consideramos sólo la bajada ( $V_o=0$ ;  $t_o=4$  s):

$$V_f = V_o + a(t_f - t_o) \Rightarrow V_3 = 0 - 9,8(8 - 4) \Rightarrow V_3 = -39,2m/s \rightarrow (\text{baja})$$

En cualquier caso, vemos la importancia de fijar un punto de referencia (al que se refieren todos los datos) y que no se cambia durante el ejercicio.

## 8.- MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME (MCU)

El movimiento circular uniforme tiene por trayectoria una circunferencia y se realiza sin variar el valor numérico de la velocidad.

### MAGNITUDES LINEALES

El movimiento es uniforme; por tanto, su ecuación del movimiento es de primer grado, y su representación gráfica V-t, una recta horizontal (iguales que las del movimiento rectilíneo uniforme).

El movimiento circular uniforme sí tiene aceleración, ya que la velocidad, siempre tangente a la trayectoria, cambia de dirección. Solo tiene aceleración normal (su valor coincide con la aceleración total).

$$a_N = \frac{V^2}{R}$$

El módulo del vector aceleración es constante, ya que lo son el módulo de la velocidad y el radio. Su dirección es radial y su sentido es hacia el centro de la circunferencia. Se denomina **aceleración centrípeta**.

### PERIODO Y FRECUENCIA

El movimiento circular uniforme es periódico porque se repite en cada vuelta.

- Se denomina **período (T)** del movimiento al tiempo que tarda el móvil en dar una vuelta.
- La **frecuencia (f)** es el número de vueltas que da cada segundo.

El período y la frecuencia son magnitudes inversas que se miden en s y s<sup>-1</sup>, respectivamente.

$$T = \frac{1}{f}$$

### MAGNITUDES ANGULARES

Otra manera de describir el movimiento circular es medir los ángulos centrales que describe un radio de la circunferencia en cuyo extremo está el móvil que va por ella. Aparecen así **dos magnitudes angulares**:

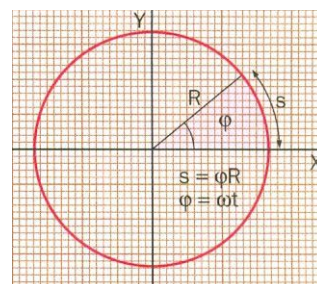
- Posición angular,  $\varphi$** . De igual forma que un móvil queda situado por su posición sobre la trayectoria o posición lineal, s, también queda determinada su posición angular,  $\varphi$ , que es el ángulo central que abarca el trozo de trayectoria (s). Si el ángulo  $\varphi$  está expresado en radianes, las posiciones lineal y angular están relacionadas a través del radio de la circunferencia.

$$S = \varphi R$$

- Velocidad angular,  $\omega$** . Es el ángulo descrito en cada unidad de tiempo por el radio que gira con el móvil.

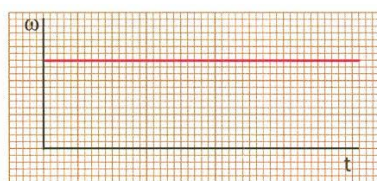
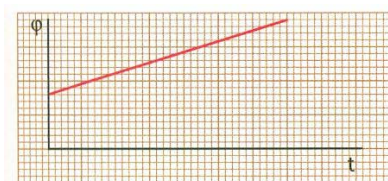
$$\omega = \frac{\varphi - \varphi_o}{t}$$

Su unidad es el rad/s. En el mcu, el móvil recorre arcos iguales cada segundo y el radio gira ángulos iguales cada segundo. Por tanto:  $\omega = \text{cte}$



La ecuación del movimiento, referida a las magnitudes angulares, es la que relaciona la posición angular con el tiempo. Despejando  $\varphi$ :

$$\varphi_f = \varphi_o + \omega(t_f - t_o)$$



### RELACIÓN ENTRE MAGNITUDES LINEALES Y ANGULARES

Relación entre las posiciones lineal y angular:  $S = \varphi R$

Relación entre las velocidades lineal y angular:  $\omega = \frac{\varphi - \varphi_o}{t} = \frac{S - S_o}{tR} = \frac{V}{R}$